KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 4. predavanje

Prisjetimo se da smo prošli put dokazali:

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za krug). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$. Tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Sada želimo dokazati da f ima derivaciju svakog reda, i da su te derivacije dane sličnom formulom. Za to trebamo sljedeću lemu o deriviranju pod znakom integrala.

Lema. Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Neka je $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f diferencijabilna po z, te da je parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z)$ neprekidna. Tada je funkcija

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \int_a^b f(t, z) dt$$

diferencijabilna na Ω i vrijedi

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) dt.$$

Dokaz. Prisjetimo se da iz Integrala funkcija više varijabli znamo analognu tvrdnju za realne funkcije:

Neka je $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za sve $(t, x) \in [a, b] \times [c, d]$ postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$, i da je $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$ neprekidna funkcija na $[a, b] \times [c, d]$. Tada je funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadana sa $g(x) = \int_a^b F(t, x) dt$ derivabilna i vrijedi $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) dt$. (Vidi Teorem 11.1 u skriptama Integrali funkcija više varijabli, dostupno na web stranici
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/)

Neka je sada $z = x + iy = (x, y)$, $f(t, z) = f(t, x, y) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$; tada je

$$\begin{aligned} g(z) = \int_a^b f(t, z) dt = \int_a^b u(t, x, y) dt + i \int_a^b v(t, x, y) dt = \\ = U(x, y) + iV(x, y). \end{aligned}$$

Po gornjoj tvrdnji za realne funkcije, U i V su derivabilne po x, y i njihove parcijalne derivacije dobivaju se deriviranjem pod znakom integrala. Sada CR uvjeti za U, V slijede iz CR uvjeta za u, v, pa je g holomorfna, i vrijedi formula za $g'(z)$. $\square$

Teorem (generalizirana CIF za krug). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$. Tada za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Posebno, f ima derivaciju **svakog** reda.

Dokaz. Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw, \end{aligned}$$

što daje tvrdnju za $n = 1$. Na isti način se induktivno dokaže tvrdnja za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Korolar. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna na Ω i derivabilna na Ω osim možda u konačno mnogo točaka $w_1, \ldots, w_n \in \Omega$. Onda je f derivabilna i u točkama $w_1, \ldots, w_n$, dakle na cijelom skupu Ω.

Dokaz. Promatrajmo prvo točku w_1. Neka $r_1 > 0$ takav da je $K(w_1, r) \subseteq \Omega$ i $w_2, \ldots, w_n \notin K(w_1, r)$ (takav $r_1 > 0$ postoji jer je skup $\Omega \setminus \{w_2, \ldots, w_n\}$ otvoren skup). Dokažimo da je f derivabilna na $K(w_1, r_1)$ - to je dovoljno da zaključimo da je f derivabilna u w_1.

Kako je restrikcija funkcije f na $K(w_1, r_1)$ neprekidna na $K(w_1, r_1)$ i derivabilna na $K(w_1, r_1) \setminus \{w_1\}$, prema Korolaru s prošlog predavanja (taj smo korolar zvali Tehnička napomena) slijedi da f ima primitivnu funkciju F na $K(w_1, r_1)$. Iz $F'(z) = f(z), \forall z \in K(w_1, r_1)$ slijedi da je F derivabilna na $K(w_1, r_1)$. Prema prethodnom teoremu, F ima derivaciju svakog reda, što znači da i f ima derivaciju svakog reda na $K(w_1, r_1)$. Slijedi da je f derivabilna u w_1.

Sada postupak ponovimo za ostale točke. □

Primjer. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $z_0 \in \Omega$. Definiramo funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0; \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Već smo ustanovili, u dokazu CIF za krug, da je g neprekidna na Ω i derivabilna na $\Omega \setminus \{w\}$. Sada, nakon što smo dokazali prethodni korolar, možemo zaljučiti da je g je derivabilna i u z_0, dakle na cijelom Ω.

Poseban slučaj je sljedeća funkcija, dobivena biranjem $z_0 = 0$ i $f(z) = \sin z$:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0. \end{cases}.$$

Zaključujemo da je g derivabilna na $\mathbb{C}$.

Jedna od posljedica Cauchyjeve integralne formule je Liouvilleov teorem. Najprije definiramo pojam *cijele funkcije*: to je funkcija čija je domena cijeli $\mathbb{C}$ i koja je derivabilna (na $\mathbb{C}$).

Liouvilleov teorem Svaka cijela ograničena funkcija je konstantna.

Dokaz. Neka je $M > 0$ takav da je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Želimo dokazati da je $f'(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$; tada slijedi da je f konstanta. Fiksirajmo $z = z_0$ i dokažimo $f'(z_0) = 0$.

Za svaki $r > 0$ je kružnica

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$$

zajedno sa svojom unutrašnjošću sadržana u domeni funkcije f (zato je bitno da je f definirana na cijelom $\mathbb{C}$). Prema Generaliziranoj CIF za krug,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw.$$

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$\begin{aligned}
|f'(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \max\{ \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^2} : w \in \gamma_r([0, 2\pi]) \} \ell(\gamma_r) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot 2r\pi \\
&= \frac{M}{r}.
\end{aligned}$$

Vidimo da vrijedi $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ za svaki $r > 0$. S obzirom da je $\lim_{r\to\infty} \frac{M}{r} = 0$ slijedi da je $f'(z_0) = 0$. □

Osim funkcija definiranih na krugu, bit će nam bitne i funkcije definirane na kružnom vijencu. Zato dokazujemo:

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za kružni vijenac) Neka je $V = V(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kružni vijenac sa središtem u z_0 radijusa r i R, te f derivabilna funkcija na V. Tada vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

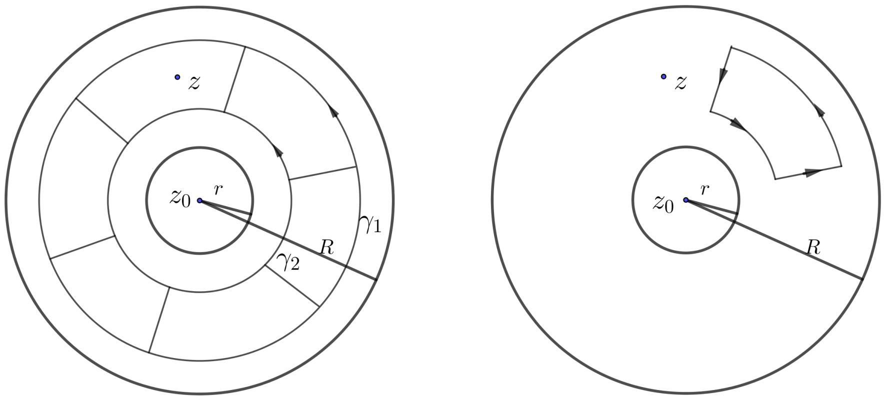
gdje su γ_1 i γ_2 kružnice sa središtem u z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, redom, tako da je $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$.

Dokaz. Neka je $z \in V$ proizvoljno odabran. Definiramo funkciju

$$g : V \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z; \\ f'(w), & w = z. \end{cases}$$

Slično kao u dokazu CIF za krug zaključimo da je g derivabilna na V.

S obzirom da želimo primijeniti Cauchyjev teorem za zvjezdast skup, uvest ćemo nove krivulje koje će se moći smjestiti u zvjezdaste podskupove od V te će se na svaki od njih primijeniti Cauchyjev teorem za zvjezdast skup. Tako će se $\int_{\gamma_2} g - \int_{\gamma_1} g$ izraziti kao suma integrala po zatvorenim i po dijelovima glatkim krivuljama (jedna od njih je izdvojena na slici desno).



Kako je g je derivabilna funkcija na V, a svaka od "manjih" krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V svaki od tih integrala bit će jednak jednak nuli. Stoga

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

odnosno

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w - z} = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w - z}.$$

Drugi integral s lijeve strane je jednak $f(z) \cdot 2\pi i$ (Lema s prošlog predavanja), a drugi integral na desnoj strani je jednak nuli (Cauchyjev teorem za zvjezdasti skup). Slijedi

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

odakle tvrdnja odmah slijedi izražavanjem $f(z)$.

Preostaje dokazati da je doista moguće podijeliti kružni vijenac V na isječke kao gore, koji su sadržani u zvjezdastim podskupovima od V. Za to je dovoljno dokazati da je za dovoljno mali kut α isječak kružnog vijenca V sa središnjim kutem α zvjezdast skup.

Neka je P sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku). Isječak će biti zvjezdast ako je točka P unutar isječka, odnosno ako je udaljenost x od P do središta kružnog vijenca manja od R. (Tada upravo P možemo uzeti za centar zvjezdastog skupa.)

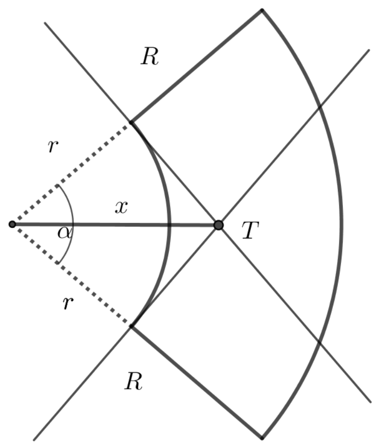
Kako je

$$x = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$x < R$ je ekvivalentno sa $\cos \frac{\alpha}{2} > \frac{r}{R}$, odnosno s

$$\alpha < 2 \arccos \frac{r}{R},$$

što je ispunjeno za dovoljno mali kut α. $\square$



Opći Cauchyjev teorem

Ovaj dio teorije izlažemo samo informativno; rezultati ove točke neće se koristiti u ostatku predavanja.

Vidjeli smo da Cauchyjev teorem vrijedi za zvjezdast skup Ω, ali ne vrijedi za svako područje Ω; npr. ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Postavlja se pitanje da li vrijedi za općenitije skupove od zvjezdastih. Vidjet ćemo da Cauchyjev teorem vrijedi za jednostavo povezana ili 1-povezana područja, koja su intuitivno govoreći područja "bez rupa".

Primijetimo također da smo za funkciju $1/z$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vidjeli da njezin integral po jediničnoj kružnici oko ishodišta nije 0. Međutim ista funkcija ima integral nula po mnogim drugim krivuljama u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - na primjer, po svakoj kružnici koja ne sadrži ishodište u svojoj unutrašnjosti. Intuitivno, te se druge kružnice mogu "neprekidno stisnuti u točku" unutar $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dok se to ne može napraviti za jediničnu kružnicu oko ishodišta.

Da bismo točnije definirali "neprekidno stiskanje", uvodimo pojam homotopije. Neka su $\alpha, \beta : [a, b] \to \Omega$ dva puta u Ω, oba od z_1 do z_2, tj. $\alpha(a) = \beta(a) = z_1$, $\alpha(b) = \beta(b) = z_2$. Kažemo da su α i β homotopni ako postoji neprekidna funkcija

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega,$$

takva da je

$$\begin{aligned} H(s, 0) = \alpha(s), \qquad H(s, 1) = \beta(s), \quad \forall s \in [a, b]; \\ H(a, t) = z_1, \qquad H(b, t) = z_2, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Funkciju H možemo zamišljati kao familiju krivulja $s \mapsto H(s, t)$ indeksiranu parametrom t, ili kao "putujuću krivulju" od z_1 do z_2, koja je u trenutku t jednaka krivulji $s \mapsto H(s, t)$ i koja se neprekidno kreće od α (za $t = 0$) do β (za $t = 1$).

Nas posebno zanima slučaj kad su α i β zatvoreni putevi odnosno petlje, tj. početak i kraj im je isti kompleksni broj $z_0 \in \Omega$. Kažemo da je petlja $\alpha : [a, b] \to \Omega$ nul-homotopna u Ω, ako je homotopna konstantnom putu

$$\gamma(s) = z_0, \qquad s \in [a, b].$$

Kažemo da je područje Ω 1-povezano ako je svaka petlja u Ω nul-homotopna u Ω.

Opći Cauchyjev teorem Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Tada:

1. Za svaku po dijelovima glatku petlju γ u Ω koja je nul-homotopna u Ω, $\int_\gamma f = 0$.
2. Ako je Ω 1-povezano područje, onda je $\int_\gamma f = 0$ za svaku po dijelovima glatku petlju u Ω.

Indeks po dijelovima glatke petlje γ u odnosu na točku z koja nije u slici od γ definira se kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

Indeks $\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka γ oko z u smjeru suprotno od kazaljke na satu.

Na primjer, ako je γ pozitivno orijentirana kružnica, onda znamo da je $\nu(\gamma, z) = 1$ za z unutar γ, i da je $\nu(\gamma, z) = 0$ za z izvan γ.

Lako je vidjeti da je funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ neprekidna; ona je štoviše lokalno konstantna.

Opća Cauchyjeva integralna formula Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je γ po dijelovima glatka nul-homotopna petlja u Ω i neka je z kompleksan broj koji nije u slici od γ. Tada je

$$\nu(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Zadatak. Dokažite opću Cauchyjevu integralnu formulu koristeći opći Cauchyjev teorem.